مشق نمبر 2

ریاضی :- (247) میٹرک

سمسٹر : بہار 2011

سوال نمبر 1 :- (الف)

الجبری جملوں کے جذر المربع کو بذریعہ تجزی اور بذریعہ تقسیم معلوم کرنے کے طریقوں کو مثالوں سے بیان کریں؟

جذر المربع بذریعہ تجزی :-

مثال :- $49x^2 + 112xy + 64y^2$ کا جذر المربع بذریعہ تجزی معلوم کریں؟

$49x^2 + 112xy + 64y^2$

$= (7x)^2 + 2(7x)(8y) + (8y)^2$

$= (7x+8y)^2 = [\pm(7x+8y)]^2$

طرفین کا جذر لینے سے

$\sqrt{49x^2 + 112xy + 64y^2} = \pm(7x+8y)$

جذر المربع بذریعه تقسیم :

مثال :

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ را جذر بذریعه تقسیم معلوم کنید؟

$$
\begin{array}{r|l}
 & a+b+c \\
\hline
a & a^2+2ab+2ac+2bc+b^2+c^2 \\
 & -a^2 \\
\hline
 & 2ab+2ac+2bc+b^2+c^2 \\
2a+b & -2ab \qquad\qquad -b^2 \\
\hline
 & 2ac+2bc+c^2 \\
2a+2b+c & -2ac \quad -2bc-c^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

سوال نمبر ۱ جز (ب)

اگر $A=\begin{bmatrix}7 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ سیر ثابت کنید

$$A^{-1}A = AA^{-1} = 1$$

$$|A| = \begin{vmatrix}7 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}$$

$$|A| = |7\times 2 - 3\times 1| = 14-3 = 11$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-3}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-3}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{11} \times 7 + \left(-\frac{1}{11}\right) \times 3 & \frac{2}{11} \times 1 + \left(\frac{-1}{11}\right) \times 2 \\ \frac{-3}{11} \times 7 + \frac{7}{11} \times 3 & \frac{-3}{11} \times 1 + \frac{7}{11} \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{14}{11} - \frac{3}{11} & \frac{2}{11} - \frac{2}{11} \\ \frac{-21}{11} + \frac{21}{11} & \frac{-3}{11} + \frac{14}{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11}{11} & \frac{0}{11} \\ \frac{0}{11} & \frac{11}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-3}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \times \frac{2}{11} + 1 \times \left(-\frac{3}{11}\right) & 7 \times \left(-\frac{1}{11}\right) + 1 \times \frac{7}{11} \\ 3 \times \frac{2}{11} + 2 \times \left(-\frac{3}{11}\right) & 3 \times \left(\frac{-1}{11}\right) + 2 \times \frac{7}{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{14}{11} - \frac{3}{11} & \frac{-7}{11} + \frac{7}{11} \\ \frac{6}{11} - \frac{6}{11} & \frac{-3}{11} + \frac{14}{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{11}{11} & \frac{0}{11} \\ \frac{0}{11} & \frac{11}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

ثابت بوو

$$A^{-1}A = AA^{-1} = 1$$

سوال نمبر 2: حصہ (الف)

کریمر کے اصول کو ثابت کریں اور ایک مثال سے اس کی پڑتال بھی کریں؟

کریمر کا اصول :-

ہم لے $a_1x + b_1y = c_1 \,,\; a_2x + b_2y = c_2$

$$Ax = B$$

$$x = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} b_2c_1 - b_1c_2 \\ -a_2c_1 + a_1c_2 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{|A|}$$

$$= \frac{D_1}{|A|}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{|A|}$$

$$= \frac{D_2}{|A|}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مثال :-

$$5x + 2y = 1$$
$$3x - y = -4$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 8 = 7$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 3 = -23$$

$$x = \frac{D_1}{|A|} = \frac{7}{-11} = -\frac{7}{11}$$

$$y = \frac{D_2}{|A|} = \frac{-23}{-11} = \frac{23}{11}$$

$$x = -\frac{7}{11}, \quad y = \frac{23}{11}$$

$$\left\{ -\frac{7}{11}, \frac{23}{11} \right\}$$ م.ح

سوال نمبر 2: جز (ب)

مثالوں سے اصول متعارفہ اور اصول موضوعہ کا فرق واضح کریں؟

اصول متعارفہ: (Axims)

ایسا مفروضہ جو ریاضی کی تقریباً سبھی شاخوں میں مشترک ہو انہیں اصول متعارفہ کہتے ہیں۔

مثلاً: a, b, c حقیقی اعداد ہوں تو

$a = b$

$ac = bc$

اصول موضوعہ (Postulate)

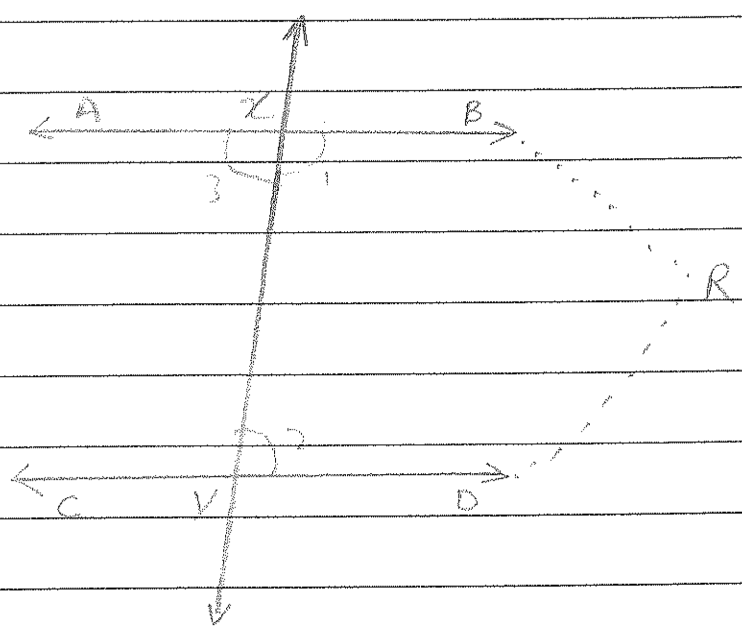
ایسا مفروضہ جس کا تعلق ریاضی کی متعلقہ شاخ سے ہو اسے اصول موضوعہ کہتے ہیں۔

مثلاً: دو نقاط میں سے ایک اور صرف ایک خط گزرتا ہے۔ جیومیٹری کا ایک اصول موضوعہ ہے

سوال نمبر 3: جز (الف)

ثابت کریں کہ اگر ایک خط اپنے دو ہم

مستوی خطوط کی قطع کرکے اپنے ایک ہی طرف
کے دو سپلیمنٹری اندرونی زاویے بنائے
تو وہ خطوط متوازی ہوں گے۔



معلوم: $\overleftrightarrow{PQ}$ دو ہم مستوی خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$
کو نقاط x اور y پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ ایک
ہی طرف کے دو اندرونی سپلیمنٹری زاویے $\angle 1$ اور
$\angle 2$ بنتے ہیں۔

$$m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$$

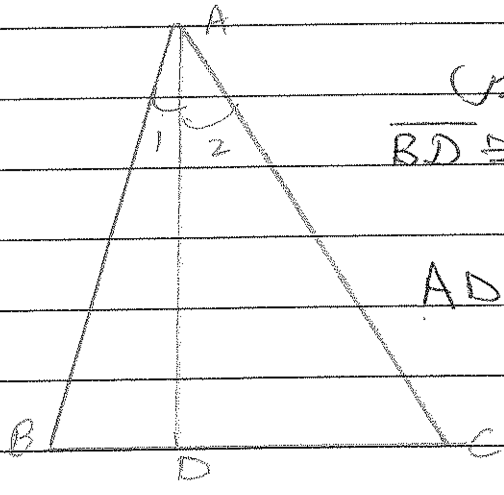
مطلوب: $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ متوازی ہیں۔

ثبوت: فرض کیا نقطہ R خطوط $\overleftrightarrow{AB}$
اور $\overleftrightarrow{CD}$ کا نقطہ تقاطع ہے۔

دلائل	بیانات
سپلیمنٹری زاویے	$m\angle 3 + m\angle 1 = 180^\circ$ (i)
معلوم	$m\angle 2 + m\angle 1 = 180^\circ$ (ii)
مساوات (i) اور (ii) کی رو سے	$m\angle 3 + m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 1$
$\angle 1$ تفریق کیا	$m\angle 3 = m\angle 2$
$\angle 3$ مثلث XYR کا بیرونی زاویہ ہے اور $\angle 2$ اس کا مخالف اندرونی زاویہ ہے	جو کہ ممکن نہیں
	پس ہمارا مفروضہ غلط ہے
	$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

سوال نمبر 3:۔ جز (ب)

ثابت کریں کہ مساوی الساقین مثلث کے قاعدہ کی تنصیف کرنے والا وسطانیہ راسی زاویہ کا ناصف اور قاعدہ پر عمود ہوتا ہے۔



معلوم:۔ $\triangle ABC$ میں
$\overline{BD} \cong \overline{CD}$ اور $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

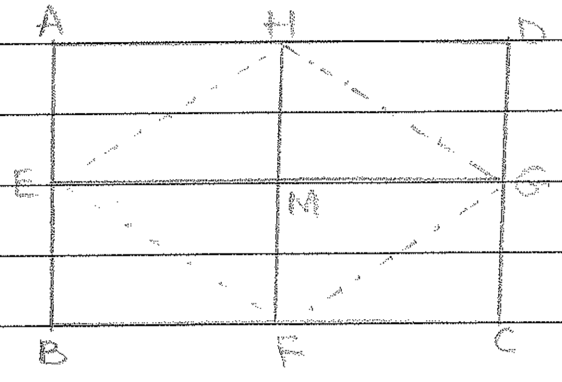
مطلوب:۔ $AD \perp BC$ اور $\angle 1 = \angle 2$
$\angle ADB = 90^\circ$ یا

ثبوت:

دلائل	بیانات
	مطابقت $\Delta ABD \leftrightarrow \Delta ACD$ میں
معلوم	$AB \cong AC$
مشترک اضلاع	$AD \cong CD$
معلوم	$\Delta ABD \cong \Delta ACD$
ض ض ض موضوعہ	$\angle 1 \cong \angle 2$
متماثل مثلثوں کے متماثل کی رو سے	$\angle ADC \cong \angle ADB = 90^\circ$
$\angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$	$AD \cong BC$

سوال نمبر 6: جز (الف)

ثابت کریں کہ مستطیل کے مخالف اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعات خط ایک دوسرے کو قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتے ہیں؟



معلوم: ABCD ایک مستطیل ہے، AB، BC

CD اور DA اس کے اضلاع ہیں۔ وسطی نقاط D

بالترتیب E, F, G اور H ہیں۔ EG اور FH ایک دوسرے کو نقطہ M میں قطع کرتے ہیں۔

مطلوب: EG اور FH ایک دوسرے کی عموداً تنصیف کرتے ہیں۔

عمل: نقاط E, F, G اور H کو آپس میں ملا دیا۔

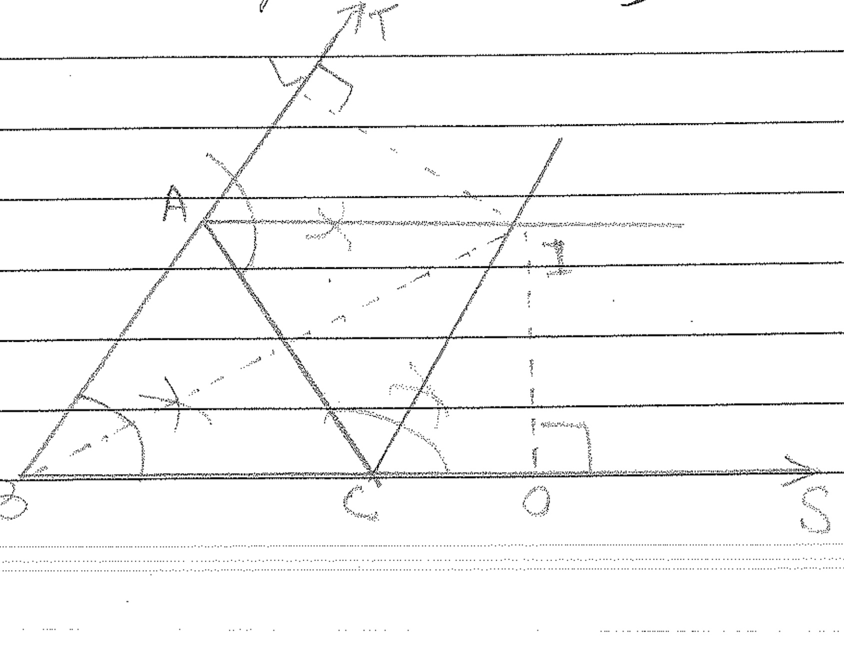
ثبوت:

دلائل	بیانات
	مطابقت $\Delta EAH \leftrightarrow \Delta GDH$ میں
ہر ایک زاویہ قائمہ ہے	$\angle A \cong \angle D$
متماثل اضلاع کے نصف	$AE \cong DG$
متماثل اضلاع کے نصف	$AH \cong DH$
ض۔ز۔ض موضوعہ	$\Delta EAH \cong \Delta GDH$
متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع	$EHG \cong GH$ (i)
	مطابقت $\Delta GDH \leftrightarrow \Delta GCF$ میں
ہر ایک زاویہ قائمہ ہے	$\angle D \cong \angle C$
متماثل اضلاع کے نصف	$GD \cong GC$
متماثل اضلاع کے نصف	$DH \cong CF$
ض۔ز۔ض موضوعہ	$\Delta GDH \cong \Delta GCF$
متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع	$GH \cong FG$ (ii)
	مطابقت $\Delta GCF \leftrightarrow \Delta EBF$ میں
ہر ایک زاویہ قائمہ ہے	$\angle C \cong \angle B$
متماثل اضلاع کے نصف	$GC \cong EB$

$CF \cong BF$	متماثل اضلاع کے نصف
$\Delta GCF \cong \Delta EBF$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
$FG \cong FE$ (iii)	
$FE \cong FG$ یا $GH \cong EH$	مساوات (i) (ii) اور (iii) کو ملانے سے
$EFGH$ ایک متوازی الاضلاع ہے	کسی چوکور کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ترتیب وار ملانے سے متوازی الاضلاع بنتی ہے
$EFGH$ ایک معین ہے جس کے وتر EG اور FH ہیں	متوازی الاضلاع کے تمام اضلاع کی لمبائیاں برابر ہیں
EG اور FH ایک دوسرے کی قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتے ہیں	معین کے وتر ایک دوسرے کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتے ہیں

سوال نمبر ۱۶ جز (ب)

ثابت کریں کہ کسی مثلث کے دو بیرونی اور تیسرے اندرونی زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔



عمل:۔ نقطہ I سے BT اور BS پر عمود IL اور IO گرائے۔ نقاط I اور B کو ملا دیا

ثبوت:۔

بیانات	دلائل
مطابقت $\Delta ILB \leftrightarrow \Delta IOB$ میں	
$IB \cong IB$	مشترک اضلاع
$IL \cong IO$	نقطہ I، BT اور BS سے ہم فاصلہ ہے۔ کیونکہ بیرونی زاویوں A اور C کے ناصفوں کا مشترک نقطہ ہے۔
$\Delta ILB \cong \Delta IOB$	و۔ض۔ض موضوعہ
پس $\angle IBL \cong \angle OBI$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے
$m\angle LBI = m\angle OBI$	زاویوں کے متماثل کی رو سے
BI اندرونی زاویہ B کا ناصف ہے	
پس مثلث کے دو بیرونی زاویوں اور تیسرے اندرونی زاویے کا ناصف ہم نقطہ ہیں	تینوں زاویوں کا ناصف نقطہ I سے گزرتے ہیں۔

سوال نمبر 3 جز (الف)

مثلث کے وسطانیہ اور ارتفاع کی مثالوں سے وضاحت کریں

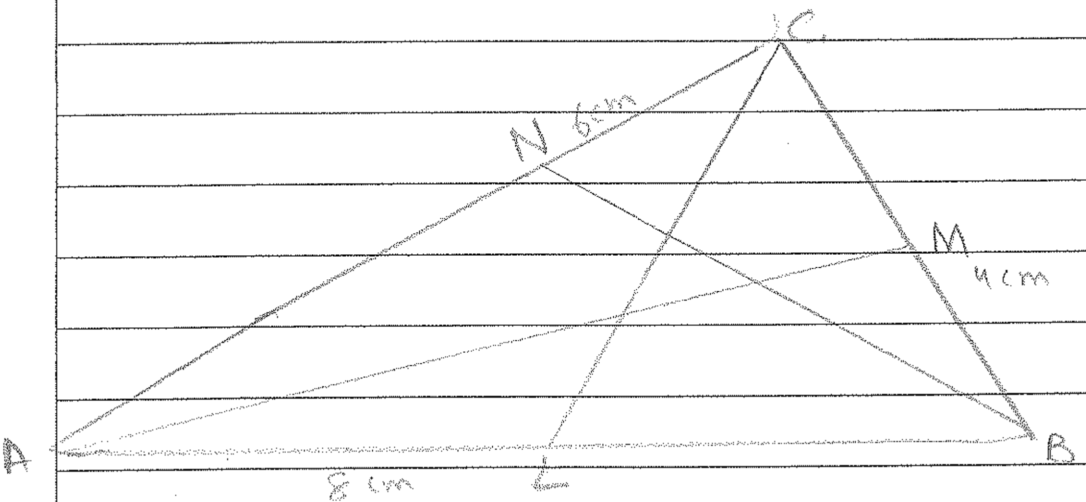
مثلث کے وسطانیہ:۔

وہ قطعہ خط جو مثلث کے راس کو اس کے سامنے والے ضلع کے وسطی نقطہ سے ملائے۔ مثلث کا وسطانیہ

کہلاتا ہے۔ مثلث کے تینوں وسطانیے ہوتے ہیں۔

مثال:۔ ΔABC کے وسطانیے کھینچیے جبکہ

$AB = 8cm$, $BC = 4cm$ اور $CA = 6cm$ ہیں۔



اقدامِ عمل:۔ (Construction Steps)

(i) دی گئی معلومات کے مطابق ΔABC بنائی۔

(ii) $\overline{AB}$ کا وسطی نقطہ L، $\overline{BC}$ کا وسطی نقطہ M اور $\overline{CA}$ کا وسطی نقطہ N معلوم کیا۔

(iii) C کو L سے، A کو M سے اور B کو N سے ملایا۔

لہٰذا

ΔABC کے مطلوبہ $\overline{CL}$، $\overline{AM}$ اور $\overline{BN}$ وسطانیے ہیں۔

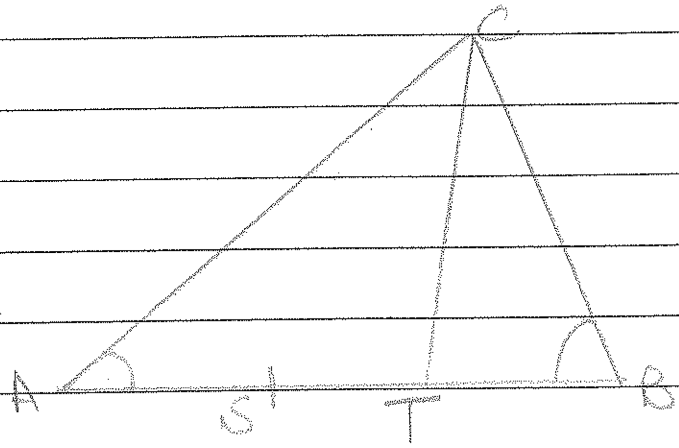
مثلث کے وسطانیے ایک ہی نقطہ سے گزرتے ہیں۔

مثلث کے ارتفاع:۔

مثلث کے کسی راس سے اس کے سامنے والے ضلع پر عمودی قطعہ خط اس مثلث کا ایک ارتفاع کہلاتا ہے۔

مثلث کے تین ارتفاع ہوتے ہیں۔

ارتفاع کی ساخت



1۔ اس ضلع پر جس کے انتہائی نقاط حادہ زاویوں کے راس ہوں۔

یہاں C سے $\overline{AB}$ پر ارتفاع کی ساخت۔

(الف) عمل:۔ (Construction Steps)

(i) C کو مرکز مان کر BC ($\overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ میں سے چھوٹا) رداس کی ایک قوس لگائی جس نے $\overline{AB}$ کو S (علاوہ B) پر قطع کیا۔

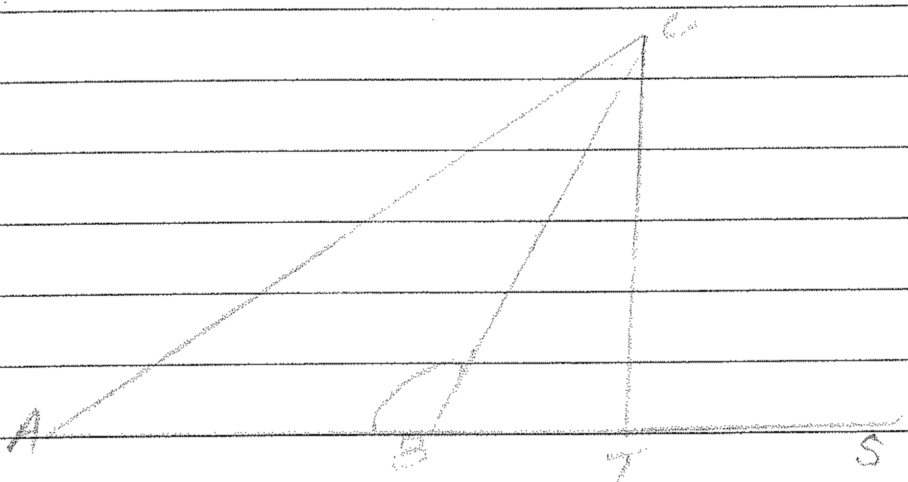
(ii) $\overline{BS}$ کا وسطی نقطہ T معلوم کیا۔

(iii) C کو T سے ملایا۔

پس $\overline{CT}$ مطلوبہ ارتفاع ہے۔

2۔ اس مثلث پر جس کا ایک انتہائی نقطہ منفرجہ زاویہ کا راس ہو۔

یہاں C سے $\overline{AB}$ پر ارتفاع کی ساخت:۔



اقدامِ عمل (Construction Steps)

(i) $\overline{AB}$ کو B (منفرجہ زاویہ کا راس) سے پرے بڑھایا۔

(ii) C کو مرکز مان کر $\overline{BC}$ ($\overline{AC}$ اور $\overline{BC}$ میں سے چھوٹا) رداس کی ایک قوس لگائی جس نے بڑھائے گئے قطعہ خط کو نقطہ S (علاوہ B) پر قطع کیا۔

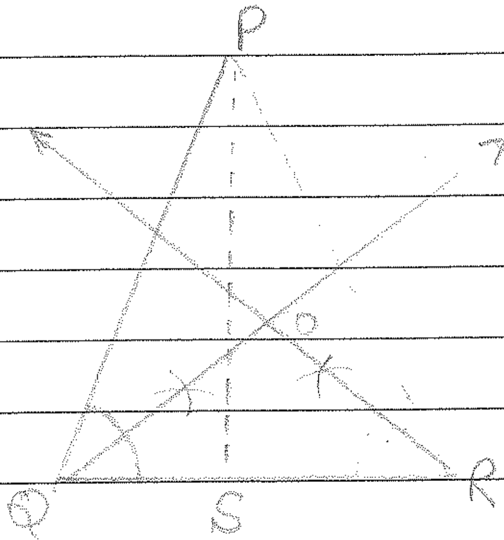
(iii) $\overline{BS}$ کا وسطی نقطہ T معلوم کیا۔

(iv) C کو T سے ملا دیا۔

پس $\overline{CT}$ مطلوبہ ارتفاع ہے۔

سوال نمبر ۷ جز نمبر (ب)

ثابت کریں کہ مساوی الساقین مثلث کے قاعدہ پر زاویوں کے ناصف اس مثلث کے ارتفاع پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔



حل:۔

معلوم:۔ ایک مساوی الساقین

$\angle PQR$ جس میں $PQ \cong PR$ اور QR اس کا قاعدہ ہے قاعدہ پر کے زاویوں Q اور R کے ناصف نقطہ O میں قطع کرتے ہیں۔

مطلوب:۔ نقطہ O مثلث کے ارتفاع پر واقع ہے جو کہ راس P سے ضلع QR پر قائم ہے

ثبوت:۔ کسی بھی مساوی الساقین مثلث

کا ارتفاع راسی زاویے اور مثلث کے قاعدہ کو
تنصیف کرتا ہے۔ لہٰذا مثلث کا ارتفاع P کا
ناصف ہے۔ لیکن مثلث کے تینوں زاویوں کے
ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔ چنانچہ P کے
کا ناصف جو کہ مثلث کا ارتفاع ہے وہ بھی
نقطہ O میں سے گزرے گا۔ لہٰذا ہم کہہ سکتے
ہیں کہ کسی مساوی الساقین مثلث کے
قاعدہ پر کے زاویوں کے ناصف اس کے
ارتفاع پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔